Lycée Antonin Artaud

Prépa TSI1

Promotion 2019/2020

Exercices de préparation

Le programme de mathématiques de la première année de TSI comporte 44 chapitres.

La maîtrise de certains chapitres de terminales est essentielle pour commencer l'année efficacement. C'est l'objectif de ce livret d'exercices.

Avant la rentrée et durant toute l'année scolaire, différents documents seront disponibles sur le site :

www.jmcabrera.net

Pour information, **la calculatrice n'est pas autorisée aux concours**. Il convient donc de maîtriser les règles élémentaires de calcul (nombres relatifs, fractionnaires, opérations classiques…).

FICHE : LES EQUATION DIFFERENTIELLES

Exercice 1

Résoudre les équations homogènes suivantes

1. $y'+y=0$
2. $y'-3y=0$
3. $y'=2y$
4. $3y'=y$
5. $y'=\frac{y}{5}$

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y'+2y=6$
2. $y'-3y=9$
3. $y'+2y=5$
4. $2y'+3y=-7$
5. $y'=\frac{-y}{4}+2$

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $9y''+y=0$
2. $4y''+25y=0$
3. $y''+5y=0$
4. $2y''=-5y$

Exercice 4

Soit (E) l'équation différentielle $y''+16y=0$

1. Résoudre (E)
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0)=\frac{1}{10}$ et $f'(0)=\frac{-2\sqrt{3}}{5}$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle (E) $y''+\frac{1}{9}y=0$ où y est une fonction de la variable t

1. Résoudre (E)
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0)=\sqrt{3}$ et $f'(0)=\frac{1}{3}$
3. Vérifier que, pour tout nombre réel t , $f(t)=2\sin(\frac{1}{3}t+\frac{\pi}{3})$

Exercice 1

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + n - 1$

1. Exprimer en fonction de n : a) u_{n-1} ; b) u_{n+1} ; c) $u_{n+1} - u_n$
2. La suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier.

Exercice 2

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et ,pour tout entier n , $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3+2u_n}$

1. Calculer les premiers termes u_1, u_2, u_3, u_4 puis $u_{10}, u_{100}, u_{1000}$
2. Quel semble être le comportement des valeurs u_n lorsque n devient de plus en plus grand ?

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{10^6}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Donner les valeurs des premiers termes u_0, u_1, u_2 puis de $u_{10}, u_{100}, u_{10^4}, u_{10^6}$
   Quel semble être le comportement des valeurs u_n lorsque n devient de plus en plus grand ?
2. Déterminer à partir de quel rang n , on a $u_n \leq \dfrac{1}{100}$
3. Déterminer à partir de quel rang n , on a $u_n \leq 10^{-6}$
4. Soit p un entier naturel quelconque , déterminer à partir de quel rang n , on a $u_n \leq 10^{-p}$.
   Conclure quand à la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) .

1. $u_n = n^3 + \dfrac{1}{n}$
2. $u_n = (3n+1)(-7n+5)$
3. $u_n = \dfrac{3 - \frac{4}{n}}{\frac{2}{n^2}}$
4. $u_n = n^3 - n^2 - 1$
5. $u_n = \dfrac{2n^2+1}{-n^2+6}$
6. $u_n = \dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}$
7. $u_n = \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)}$
8. $u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{2n+1}$
9. $u_n = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2n^2+3}{3n^2+n+1}$

FICHE : FONCTIONS LOGARITHMES

Exercice 1

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ les valeurs de :

$$\ln(10);\ln(25);\ln(16);\ln(400);\ln(\frac{2}{25});\ln(\frac{5}{8});\ln(0{,}4);\ln(\sqrt{5});\ln(2\sqrt{5});\ln(5\sqrt{10})$$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes

1. $\ln(x^2-4)=\ln(5)+2\ln(3)$
2. $\ln(x+2)=2\ln(x)$
3. $\ln(x)+\ln(x+2)=\ln(9x-12)$

Exercice 3

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que

1. $1{,}032^n \geq 4$
2. $1{,}25^n \geq 12$
3. $0{,}92^n \leq 0{,}5$
4. $0{,}5^n \leq 0{,}1$

Exercice 4

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes

1. $f(x)=x-2-\ln(x)$
2. $f(x)=x\ln(x)$
3. $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$
4. $f(x)=\ln(\frac{x+3}{2-x})$ sur $]-3\,;2[$
5. $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}$
6. $f(x)=(\ln(x))^5$
7. $f(x)=\frac{3\ln(x)+1}{\ln(x)}$

FICHE : FONCTIONS EXPONENTIELLES

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes

1. $e^{\ln(2)}; e^{-\ln(3)}; e^{2\ln(5)}; e^{\frac{1}{2}\ln(16)}; \ln(e^3); \ln(e^{-4}); \ln(\sqrt{e}); \ln(\frac{1}{\sqrt{e}})$
2. $e^3 e^5; e^{-5} e^3 e^2; (e^{-3})^2; \frac{1}{e^7}; \frac{1}{e^{-x+2}}; e^{-x+3} e^{2x+2}; \frac{e^{3x+2}}{e^{2x+3}}; (e^{-2x+3})^2$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $e^x = 3$
2. $e^x + 1 = 0$
3. $e^{x+3} = 1$
4. $e^{2x+1} = e^{-x-1}$
5. $e^{x^2+5x-5} = e$
6. $e^{6x-1} = 5$
7. $\frac{e^{3x-2}}{e^{2x+5}} = 1$

Exercice 3

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes

1. $f(x) = 3e^x + x$
2. $f(x) = x e^x$
3. $f(x) = \frac{1}{e^x + 3}$
4. $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 2}$
5. $f(x) = (3x^2 + x)e^x$
6. $f(x) = (e^x + x^2)^2$
7. $f(x) = e^x \cos(2x)$
8. $f(x) = \cos(2x) e^{3x}$
9. $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2e^{-x} - 1}$

FICHE : ETUDE D'UNE FONCTION

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x)=1-\dfrac{x-1}{e^x}$

1. Déterminer les valeurs exactes de $g(1)$ et de $g(2)$
2. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g . Montrer que $g'(x)=\dfrac{x-2}{e^x}$.

   b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $[1\,;+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variation de g

   d. Grâce au tableau de variation, en déduire que $g(x)$ est positif sur $[1\,;+\infty[$

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{1}{e^2}+\ln(x-1)$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O;I;J) d'unité graphique 1 cm

1. On admet que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe C_f dont on précisera une équation.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f

   a. Montrer que $f'(x)=\dfrac{-1}{e^x}+\dfrac{1}{x-1}$

   b. En déduire que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x-1}$

   c. En déduire le sens de variation de f sur $]1\,;+\infty[$. Dresser le tableau de variation de f
3. a. Calculer $f(2)$ et $f'(2)$

   b. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 2.

Partie C : Représentation graphique

Dans le repère défini précédemment , tracer les droites Δ et T puis la courbe C_f .