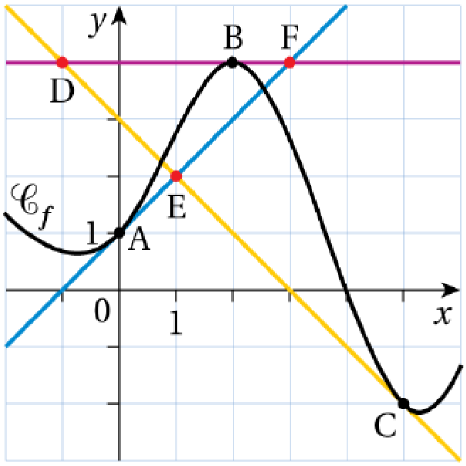
Révisions : Entrée en TS

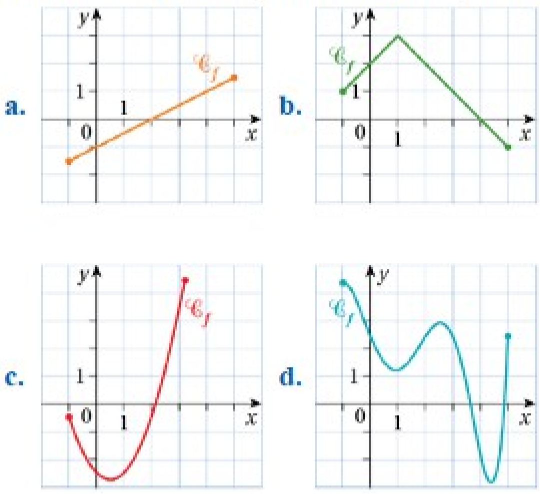
Fonctions et dérivation

Exercice 1 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est la suivante :



Les droites tracées sont des tangentes à la courbe de la fonction f aux points A, B et C.
Donner par lecture graphique une valeur approchée des nombres dérivés de f en $x = 0$, $x = 2$ et $x = 5$.

Exercice 2 : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-1 ; 5]$ dont la représentation graphique est donnée.
Dans chaque cas, donner l'allure approximative de la courbe représentative de la fonction f', dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-1 ; 5]$.



Exercice 3

Pour chacun des cas suivants, calculer la fonction dérivée de la fonction f en précisant le domaine de définition et le domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{5}{3}x$
3. $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$
4. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{5}$
5. $f(x) = (4x^2 - 7)(2 + \frac{5}{x})$
6. $f(x) = x\sqrt{x}$
7. $f(x) = \frac{1}{-8x + 5}$
8. $f(x) = \frac{3x - 1}{4x + 2}$
9. $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{2(1 - x)}$
10. $f(x) = x\cos(x) - 2\sin(x)$
11. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
12. $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Exercice 4

Dans un repère , déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative C_f de la fonction f au point d'abscisse a dans les cas suivants.

1. $f(x) = -5x^2 + 6\,;\, a = 2$
2. $f(x) = \sqrt{x}\,;\, a = 9$
3. $f(x) = \frac{3x + 5}{x + 1}\,;\, a = 0$
4. $f(x) = \frac{\pi}{x}\,;\, a = \pi$

Exercice 5

Déterminer les réels a, b, c et d tels que, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dont la courbe représentative est notée C_f , ait les propriétés suivantes :

- C_f coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse 20 .
- C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0
- C_f passe par le point $A(-1\ ;\ 18)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur vaut 3.

Exercice 6

1. Résoudre les équations suivantes
   a. $\frac{x - 1}{2x - 5} = \frac{x + 1}{x - 1}$
   b. $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$

c. $\dfrac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10}<0$

2. Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes

a. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2-5x-3}}{x^2-x-2}$

b. $g(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+6x+8}{3x^2+8x-3}}$

3. Soient f et g deux fonctions et C_f et C_g leurs représentations graphiques dans un repère orthonormé $(O;I;J)$ telles que :

- $f(x)=3x^2+5x+1$
- $g(x)=2x^2+x+6$

Déterminer la position relative de C_f par rapport à C_g .

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2$ et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O;I;J)$ du plan.

1. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$
2. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2. On la note T.
4. On donne ci-dessous la représentation graphique de f . Tracer T sur ce graphique.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-x^2-8x+12$

a. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

b. En utilisant le minimum de g sur $[0;+\infty[$, démontrer que g est positive sur $[0;+\infty[$.

c. Déduire des question précédentes la position de la courbe C_f par rapport à sa tangente.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $[-7;7]$ par $f(x)=\dfrac{8x+6}{x^2+1}$ et sa courbe représentative C_f

1. Déterminer par le calcul des coordonnées du point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.
3. Soit la droite (D) d'équation $y=-x+6$. Déterminer par le calcul pour quelles valeurs de x la droite

(D) est située au dessus de C_f

4. Calculer $f'(x)$.
5. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-7;7]$
6. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à C_f au point B d'abscisse 0.

LES SUITES

Exercice 1

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=n^2+n+1$.

Exprimer en fonction de n les termes suivants : $v_{n+1}; v_{n-1}, v_{2n}; v_{3n-1}$ et la différence $v_{n+1}-v_n$

Exercice 2

Dans chaque cas, déterminer par le calcul les 4 premiers termes de la suite puis calculer le terme de rang 20 grâce à la calculatrice

1. La suite (u_n) est définie par un premier terme $u_0=1$ et vérifie pour tout entier naturel n la relation $u_{n+1}=2u_n-3$
2. La suite (v_n) est définie par un premier terme $v_0=3$ et vérifie pour tout entier naturel n la relation $v_{n+1}=\dfrac{1}{v_n+1}$
3. La suite (w_n) est définie par un premier terme $w_0=1$ et vérifie pour tout entier naturel n la relation $w_n=w_{n-1}+2\text{n}+3$

Exercice 3

La suite (u_n) est définie par un premier terme $u_1=1$ et vérifie pour tout entier naturel n non nul la relation $u_{n+1}=\dfrac{7\text{u}_n}{n}$

1. Construire la table de valeurs de (u_n) , afficher son nuage de points et conjecturer ses variations
2. Comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1
3. En admettant que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang à préciser

Exercice 4

(u_n) est une suite arithmétique de raison r

1. On sait que $u_0=2$ et $u_1=5$. Calculer r , u_2 et u_5
2. On sait que $u_5=17$ et $u_{10}=12$. Calculer r , u_0 et u_1
3. Sachant que $u_{20}=-52$ et $u_{51}=-145$. Expliciter u_n .
4. Sachant que $u_{22}=15$ et $r=\dfrac{3}{4}$. Expliciter u_n .

Exercice 5

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_6=36$ et $u_9=81$

1. Calculer la raison de (u_n)
2. Déterminer u_{20}
3. Calculer la somme $S=u_0+u_1+.....+u_{20}$
4. Calculer la somme $S'=u_{10}+u_{11}+.....+u_{20}$

Exercice 6

(u_n) est une suite géométrique de raison q

1. On sait que $u_0=32$ et $q=\frac{1}{4}$ Calculer u_2 , u_5 , u_8
2. On sait que $u_1=\frac{1}{125}$ et $q=5$ Calculer u_0 , u_5 , u_7
3. On sait que $u_0=3$ et $u_1=12$ Calculer q , u_1 , u_5

Exercice 7

La population mondiale augmente actuellement de 1% par an. En 2010, elle était de 6,9 milliards
On note u_n la population mondiale l'année $2010+n$

1. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est géométrique. Préciser son premier terme u_0 et sa raison
2. Exprimer u_n en fonction de n
3. En supposant que le taux d'accroissement se maintienne, estimer la population mondiale en 2025
4. A l'aide de la calculatrice, estimer en quelle année les 9 milliards d'habitants seront atteints

Exercice 8

La suite (u_n) est définie par un premier terme $u_0=-1$ et vérifie pour tout entier naturel n la relation $u_{n+1}=0{,}2u_n+0{,}6$

1. a. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n=u_n-0{,}75$ est géométrique
   b. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n)
2. On pose $S_n=u_0+.....+u_n$
   a. Déterminer S_n en fonction de n
   b. Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

Exercice 9

Noémie et Alexandre comparent les étrennes qu'ils reçoivent chaque année . En 2010, Noémie a reçu 80 € et Alexandre 100 €. Chaque année, les étrennes de Noémie augmentent de 6 € et celles d' Alexandre de 3 %
Pour tout entier naturel n , on note u_n (respectivement v_n) les étrennes reçues par Noémie (respectivement par Alexandre) l'année 2010 +n , en euros. Ainsi $u_0=80$ et $v_0=100$

1. Préciser les natures des suites (u_n) et (v_n)
2. On souhaite déterminer en quelle année Noémie reçoit pour la première fois davantage qu'Alexandre.
   Compléter l'algorithme ci-dessous

```
Variables : u, v, n : nombres
Début de l'algorithme
        u prend la valeur...............
        v prend la valeur...............
        Tant que  u ≤ v  faire
            n prend la valeur n+1
            u prend la valeur u+6
            v prend la valeur.................
        Fin Tant Que
        Afficher n
Fin de l'algorithme
```

3. A partir de 2020, Noémie et Alexandre, qui seront trop grands, ne recevront plus d'étrennes . On souhaite déterminer qui aura reçu le plus d'étrennes entre 2010 et 2019

Calculer $S_{10}=u_0+....+u_{10}$ et $T_{10}=v_0+....+v_{10}$. Conclure

4. Vérifier les résultats de la Q2 et 3 à l'aide de la calculatrice

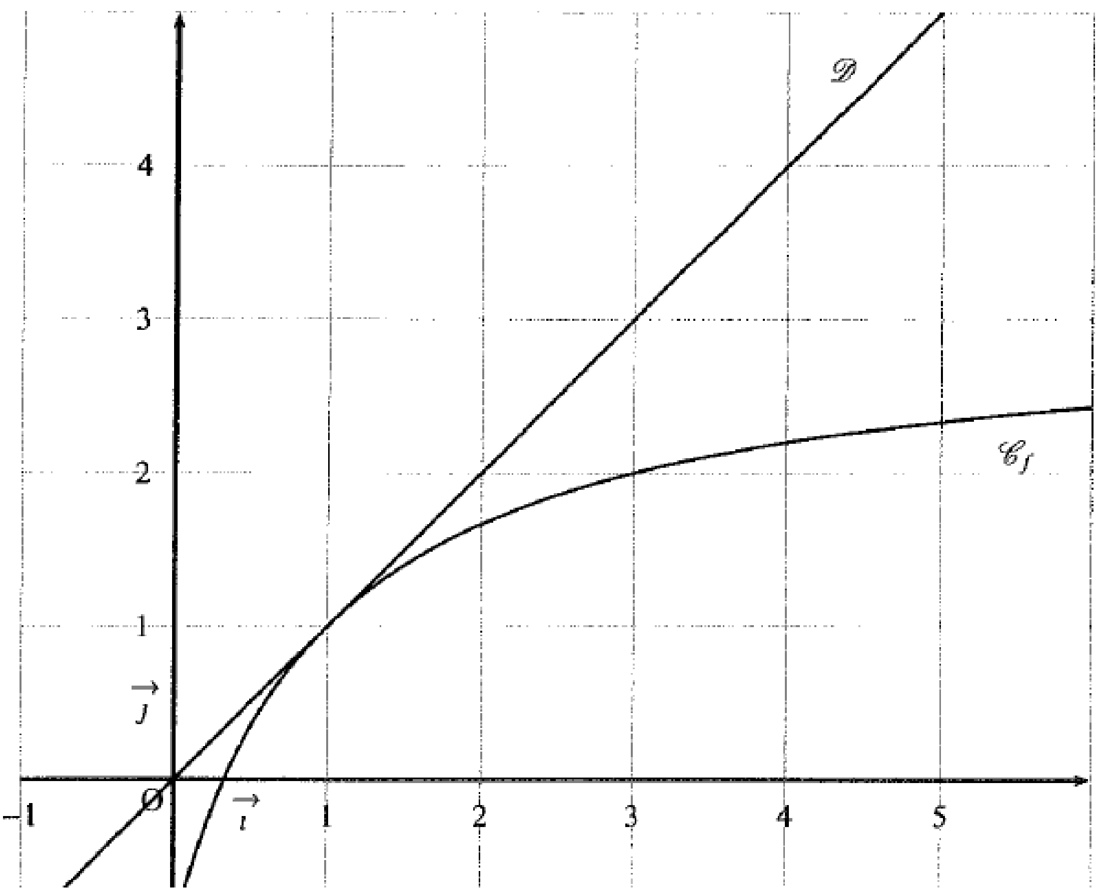
Exercice 10

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]-1 ; $+\infty$ [par $f(x)=3-\frac{4}{x+1}$

On considère la suite (u_n) est définie par un premier terme $u_0=4$ et vérifie pour tout entier naturel n la relation $u_{n+1}=f(u_n)$

On a tracé C_f la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [et la droite D d'équation $y=x$

1. Sur la graphique, placer sur l'axe des abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3 . Faire apparaître les traits de constructions
2. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n)



Probabilités : variables aléatoires – loi binomiale

Exercice 1

Un jeu de hasard se déroule selon le protocole suivant : le joueur débourse 2 €, puis lance deux dés tétraèdriques parfaits (dés à 4 faces).
Il lit les numéros, entre 1 et 4, au sommet de chacun des dés.
S'il obtient deux faces identiques, le joueur récupère sa mise et reçoit une somme, en euros, égale au total des points marqués ; sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.

On note G la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur, en euros.

1. Compléter le tableau suivant avec les gains possibles.

Dé 2 / Dé 1	1	2	3	4
1	2			
2	-2			
3				
4				

2. Dresser le tableau de la loi de probabilité de G.
3. Calculer l'espérance de G.
4. Le jeu est considéré équitable lorsque l'espérance des gains vaut 0. Que peut-on dire de ce jeu ?

Exercice 2

Une urne contient 8 boules : 4 vertes, 3 rouges et une noire. Un joueur tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.
S'il obtient deux boules vertes, il gagne 4 € et s'il obtient deux boules rouges, il gagne 1 €.
Sinon, il perd 1 € si le tirage contient une boule noire et perd 2 € dans les autres cas.

On note G la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Donner la loi de G.
3. Calculer l'espérance et l'écart-type de G.
4. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 3

Un constructeur de composants électroniques produit des résistances. On admet que la probabilité qu'une résistance produite soit défectueuse est de 0,005. Les probabilités que ces résistances soient défectueuses sont indépendantes. On prélève un lot de 1 000 résistances dans la production et on suppose que le stock de résistances est suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 résistances.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 1 000 résistances, associe le nombre de résistances défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer les probabilités des évènements suivants arrondies au millième.
   (a) "Le lot contient exactement deux résistances défectueuses". *Écrire la formule puis le résultat.*
   (b) "Le lot contient au plus deux résistances défectueuses". *Utiliser la calculatrice.*
   (c) "Le lot contient au moins une résistance défectueuse". *Détailler la réponse.*
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Exercice 4

À un concours, un QCM comporte 8 questions. Pour chaque question, on propose 3 réponses dont une seule est correcte. Une bonne réponse rapporte un point et une mauvaise réponse enlève un demi-point.
Un candidat décide de répondre au hasard à toutes les questions.

1. On définit la variable aléatoire X donnant le nombre de bonnes réponses du candidat.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir 4 bonnes réponses au QCM. *Détailler les calculs et donner le résultat sous forme de fraction.*
   (c) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
2. On définit la variable aléatoire Y donnant le nombre de points du candidat.
   (a) Exprimer Y en fonction de X.
   (b) En déduire l'espérance de Y et interpréter le résultat.

Produit scalaire

Exercice 1

ABC est un triangle et I est le milieu de [BC].

Données : $\widehat{AIB} = 60°$, BI = CI = 2 et AI = 3.

Calculer :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (introduire le point I)

2) $AB^2 + AC^2$

Exercice 2

MNPQ est un carré avec MN = 6, I est le centre du carré.

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{QP}$

2) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PN}$

3) $\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IP}$

Exercice 3

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 4)$ et $C(8\ ;\ 0)$.

1. a. Calculer BA et BC.

b. Démontrer que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 40$ et que :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 20\sqrt{5}\cos\widehat{ABC}$$

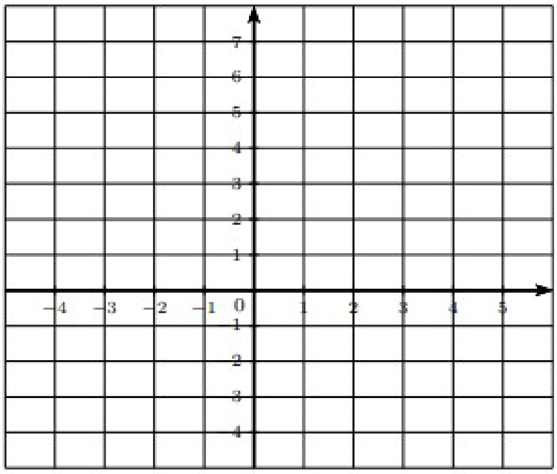
2. En déduire $\cos\widehat{ABC}$, puis une mesure de $\widehat{ABC}$ à un degré près.

Equations de droites

Exercice 1

Les deux questions suivantes sont indépendantes.
Pour chacune des questions suivantes, on considère un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

1. On considère quatre points $A(1\ ;\ 4)$, $B(3\ ;\ -2)$, $C(-1\ ;\ -2)$ et $D(-2\ ;\ 1)$.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



2. a. Déterminer une équation cartésienne de la droite d de vecteur directeur $\vec{u}(-3\ ;\ 2)$ passant par $A(-1\ ;\ 4)$.

b. On considère la droite d' d'équation $x-3y+1=0$. Déterminer un vecteur directeur de cette droite.

c. Tracer les droites d et d' dans le repère ci-contre.

Exercice 2

On considère un triangle ABC dans un repère orthonormal avec A (– 1 ; 2), B (3 ; 1) et C (2 ; 4).
1) Déterminer une équation de la médiatrice de [AB].
2) Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Equations cartésiennes de droite

Exercice 1

Examiner si les équations suivantes sont des équations de cercle, et si c'est le cas, préciser le centre et le rayon du cercle.
1) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0.$
2) $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0.$

Exercice 2

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne un point I (2 ; – 3).
1) Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon R = 5.
2) Démontrer que le point A (– 2 ; 0) est un point du cercle $\mathscr{C}$.
3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.

Trigonométrie

Exercice 1

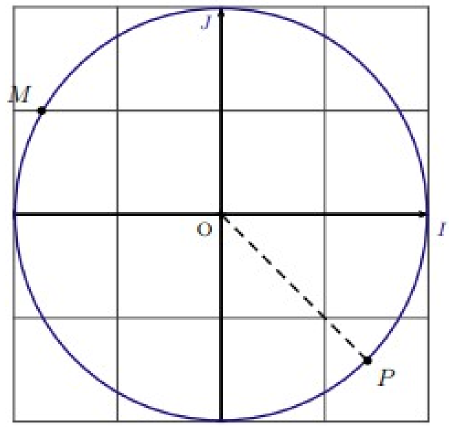
a. Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les points A $(-\pi)$, B $\left(\frac{-4\pi}{3}\right)$, C $\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

b. Quel est le nombre de $[0\ ;\ 2\pi[$ associé au point P.

....

c. Quel est le nombre de $]-\pi\ ;\ \pi]$ associé au point M.

....

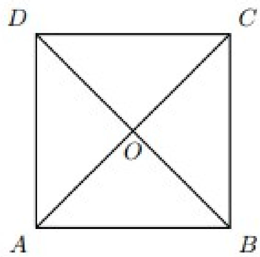


$ABCD$ un carré de sens direct de centre O (voir le schéma ci-contre).
Calculer :

a. $\left(\overrightarrow{BO}\,;\,\overrightarrow{BC}\right)$;

b. $\left(\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{BA}\right)$;

c. $\left(\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{BO}\right)$.



Exercice 2

On donne $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) = \frac{5\pi}{12}$ et $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}) = \frac{17\pi}{12}$.
Montrer que $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraire.

Exercice 3

Calculer $\sin\left(\frac{59\pi}{3}\right)$.

Exercice 4

Résoudre, dans $[0\,;\,2\pi[$, l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Résoudre, dans $[-\pi\,;\,\pi[$, $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant 0$.